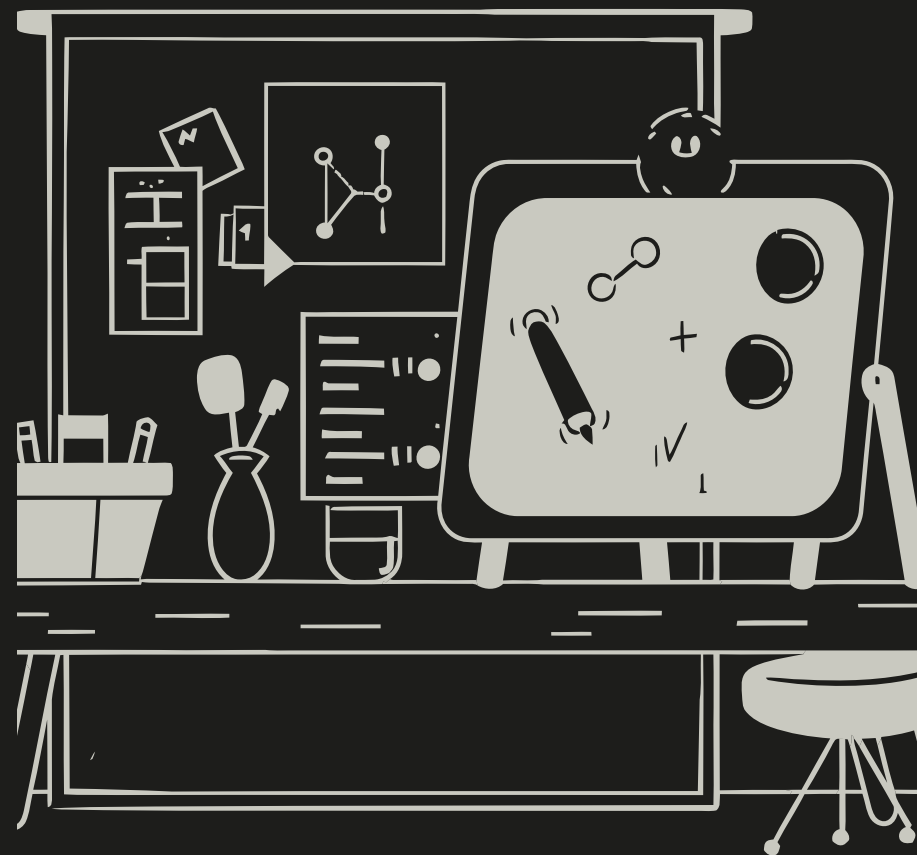


Własności potęgowania i pierwiastkowania

Poznaj najważniejsze wzory i własności potęg oraz pierwiastków.



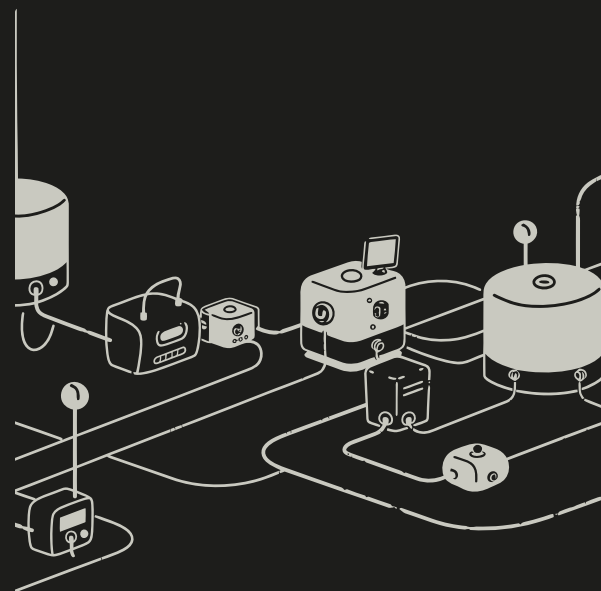
Co to jest potęga?

Potęga to **wielokrotne mnożenie tej samej liczby**. Jest to matematyczny skrót, który pozwala zapisać długie mnożenia w prostszy sposób.

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad (n \text{ razy})$$

- **a** – podstawa potęgi (liczba, którą mnożymy)
- **n** – wykładnik (ile razy mnożymy podstawę)

Przykład: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$



Podstawowe własności potęg (część 1)

Mnożenie potęg o tej samej podstawie

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Gdy mnożymy potęgi o tej samej podstawie, dodajemy wykładniki.

Przykład: $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$

Dzielenie potęg o tej samej podstawie

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Przy dzieleniu potęg o tej samej podstawie odejmujemy wykładniki.

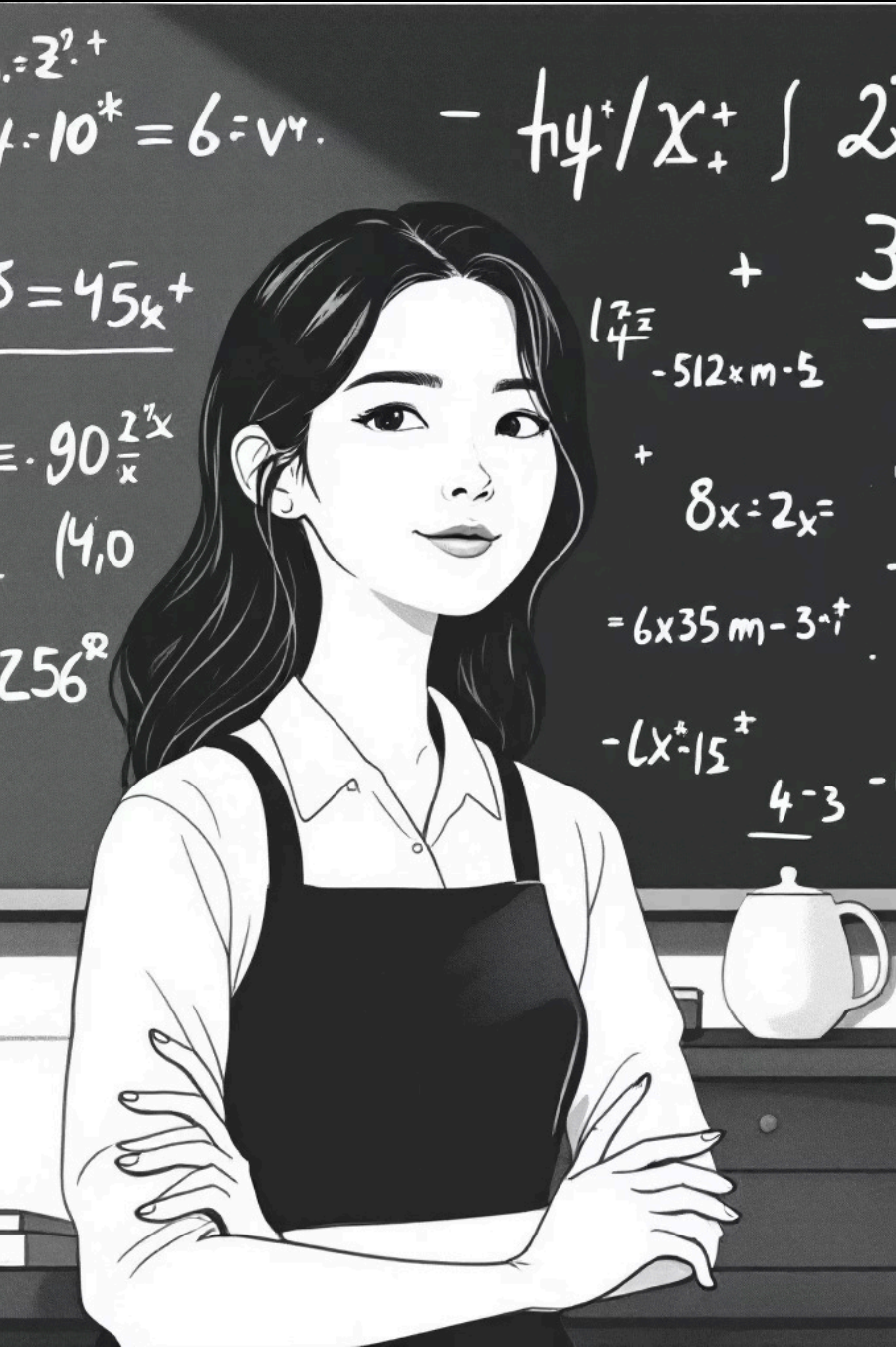
Przykład: $\frac{5^7}{5^3} = 5^{7-3} = 5^4$

Potęgowanie potęgi

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Gdy podnosimy potęgę do potęgi, mnożymy wykładniki.

Przykład: $(3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8$



Podstawowe własności potęg (część 2)

Potęgowanie iloczynu

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Przykład: $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$

Potęgowanie ilorazu

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Przykład: $\left(\frac{4}{2}\right)^3 = \frac{4^3}{2^3} = \frac{64}{8} = 8$

Potęga o wykładniku zero

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

Każda liczba różna od zera podniesiona do potęgi zero równa się jeden.

Potęga o wykładniku ujemnym

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

Przykład: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Co to jest pierwiastek?

Pierwiastek to **działanie odwrotne do potęgowania**.

Jeśli potęga mówi nam "pomnóż liczbę sama przez siebie n razy", to pierwiastek pyta "jaka liczba pomnożona sama przez siebie n razy da nam wynik a?"

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{jeśli} \quad b^n = a$$

Najczęściej używamy **pierwiastka kwadratowego** ($n=2$), który zapisujemy bez wykładnika:

$$\sqrt{9} = 3 \text{ bo } 3^2 = 9$$

Używamy też **pierwiastka sześciennego** ($n=3$), który zapisujemy z wykładnikiem:

$$\sqrt[3]{27} = 3 \text{ bo } 3^3 = 27$$



Własności działań na pierwiastkach

01

Iloczyn pierwiastków

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

Pierwiastek z iloczynu równa się iloczynowi pierwiastków.

Przykład: $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$

02

Iloraz pierwiastków

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Pierwiastek z ilorazu równa się ilorazowi pierwiastków.

Przykład: $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2,5$

03

Kwadrat pierwiastka

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

Podniesienie pierwiastka kwadratowego do kwadratu daje podstawę.

Przykład: $(\sqrt{7})^2 = 7$



Własności pierwiastka sześciennego

Pierwiastek sześcienny z iloczynu

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

Pierwiastek sześcienny z iloczynu dwóch liczb jest równy iloczynowi pierwiastków sześciennych z tych liczb.

Przykład: $\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$

Pierwiastek sześcienny z ilorazu

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \quad (b \neq 0)$$

Pierwiastek sześcienny z ilorazu dwóch liczb jest równy ilorazowi pierwiastków sześciennych z tych liczb.

Przykład: $\sqrt[3]{\frac{64}{8}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4}{2} = 2$

Pierwiastek sześcienny z potęgi sześciennej

$$\sqrt[3]{a^3} = a$$

Pierwiastek sześcienny z liczby podniesionej do potęgi trzeciej jest równy tej liczbie.

Przykład: $\sqrt[3]{5^3} = 5$

Ćwiczenia: Potęgi i Pierwiastki

Sprawdź swoją wiedzę, rozwiązując poniższe zadania. Pamiętaj o stosowaniu poznanych własności potęg i pierwiastków, aby uprościć obliczenia.

Zadania z potęgami

1

Zadanie łatwe

Oblicz wartość wyrażenia, korzystając z własności potęg:

$$5^3 \cdot 5^2$$

Wskazówka: Dodaj wykładniki przy mnożeniu potęg o tej samej podstawie.

2

Zadanie średnie

Uprość i oblicz:

$$((4^2)^3 \cdot 4^{-2}) / 4^0$$

Wskazówka: Zastosuj potęgowanie potęgi, następnie własności dla wykładników ujemnych i zerowych.

3

Zadanie trudne

Oblicz wartość wyrażenia:

$$\frac{(2 \cdot 3)^3}{6^2} + 5^1 \cdot 5^{-1}$$

Wskazówka: Rozbij iloczyn w potęgę, a następnie uprość wyrażenie korzystając z kolejności działań.

Zadania z pierwiastkami

1

Zadanie łatwe

Oblicz:

$$\sqrt{64} + \sqrt[3]{8}$$

Wskazówka: Pamiętaj, że pierwiastkowanie to działanie odwrotne do potęgowania.

2

Zadanie średnie

Uprość wyrażenie:

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$$

Wskazówka: Pierwiastek z iloczynu jest równy iloczynowi pierwiastków.

3

Zadanie trudne

Oblicz:

$$\frac{\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt{100}}{\sqrt{25}}$$

Wskazówka: Oblicz poszczególne pierwiastki, a następnie wykonaj dzielenie i mnożenie.



Podsumowanie i wskazówki

Potęgowanie i pierwiastkowanie to **podstawowe działania matematyczne**, które często się uzupełniają. Znajomość wzorów znacznie ułatwia obliczenia!

1 Kluczowe wzory do zapamiętania

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

2 Jak ćwiczyć skutecznie?

Regularnie trenuj zamianę pierwiastków na potęgi i stosowanie własności potęg w różnych zadaniach.

3 Praktyczne zastosowanie

Te wzory przyda się nie tylko w matematyce, ale także w fizyce, chemii i informatyce!

❏ **Pamiętaj:** Pierwiastkowanie to działanie odwrotne do potęgowania - jeśli rozumiesz jedno, to drugie będzie łatwiejsze!